GRAFURI NEORIENTATE

1. Notiunea de graf neorientat

<u>Definitie:</u>

Se numeşte graf neorientat o pereche ordonată de multimi notată G=(V, M) unde:

V : este o multime finită şi nevidă, ale cărei elemente se numesc ***noduri*** sau ***vârfuri***;

M : este o multime, de perechi neordonate de elemente distincte din V, ale cărei elemente se numesc ***muchii***.

Exemplu de graf neorientat:

G=(V, M) unde: V={1,2,3,4} si M={{1,2}, {2,3},{1,4}}

Demonstratie:

Perechea G este graf neorientat deoarece respectă definitia prezentată mai sus, adică:

V : este finită şi nevidă;

M : este o multime de perechi neordonate (submultimi cu două elemente) de elemente din V.

În continuare, vom nota submultimea {x,y}, care reprezintă o muchie, cu [x,y] (***într-un graf neorientat muchia [x,y] este aceeaşi cu muchia [y,x]***).

În baza celor spuse anterior, graful prezentat în exemplul de mai sus se reprezintă textual astfel:

G=(V, M) unde: V={1,2,3,4}

M={[1,2],[2,3],[1,4]}

În teoria grafurilor neorientate, se întâlnesc frecvent notiunile:

☞ ***extremitătile unei muchii***

• fiind data muchia m=[x,y], se numesc extremităti ale sale nodurile x şi y;

☞ ***vârfuri adiacente***

• dacă într-un graf există muchia m=[x,y], se spune despre nodurile x şi y ca sunt adiacente;

☞ ***incidentă***

• dacă ml şi m2 sunt două muchii ale aceluiaşi graf, se numesc incidente dacă au o extremitate comună.

Exemplu:

m 1=[x,y] şi m2=[y,z] sunt incidente.

Dacă m=[x,y] este o muchie într-un graf, se spune despre ea şi nodul x, sau nodul y, ca sunt incidente.

Reprezentarea unui graf neorientat admite două forme, şi anume:

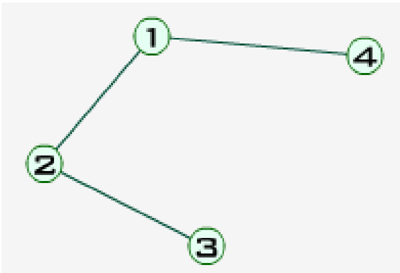
- ***reprezentare textuală***: aşa cum s-a reprezentat graful din exemplul anterior;
- ***reprezentare grafică*** : muchiile sunt reprezentate prin linii, iar nodurile prin puncte.

Exemplu de graf neorientat reprezentat textual:

G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4]

M={[l,2], [2,3], [1,4]}

Exemplu de graf neorientat reprezentat grafic:



2. Notiunea de graf partial

Definitie.

Fie G=(V, M) un graf neorientat. Se numeşte graf partial, al grafului G, graful neorientat G1=(V, M1) unde M1 ⊆ M.

Concluzie:

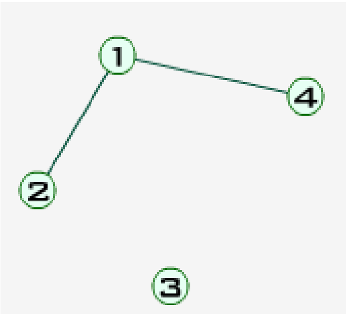
Un graf partial al unui graf neorientat G=(V, M) are **aceeaşi multime de vârfuri** ca şi G iar multimea muchiilor este o submultime a lui M sau chiar M.

Exemplu:

Fie graful neorientat: G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4} si M={[1,2], [1,4], [2,3]} reprezentat grafic astfel:

1. Un exemplu de graf partial al grafului G este graful neorientat:

G1=(V, M,) unde: V={1,2,3,4} M1={[1,2],[1,4]} (*s-a eliminat muchia [2,3])* reprezentat grafic astfel:



2. Un exemplu de graf partial al grafului G este graful neorientat:

G1=(V,M1) unde: V={1,2,3,4} M1= ∅ (*s-au eliminat toate muchiile*) reprezentat grafic astfel:

Observatie:

Fie G=(V, M) un graf neorientat. Un graf partial, al grafului G, se obtine păstrând vârfurile şi eliminând eventual nişte muchii (se pot elimina şi toate muchiile, sau chiar nici una).

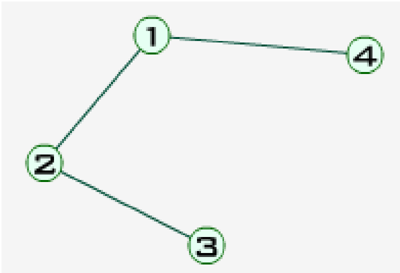
3. Notiunea de subgraf

Definitie:

Fie G=(V, M) un graf neorientat. Se numeşte **subgraf** al grafului G, graful neorientat G1=(V1,M1) unde V1⊆ V iar **M1 contine toate muchiile din M** care au extremitătile în V1.

Exemplu:

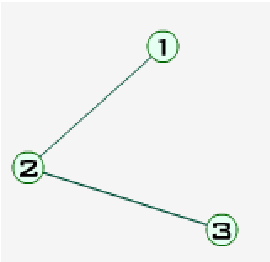
Fie graful neorientat: G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4} si M={[1,2], [2,3], [1,4]} reprezentat grafic astfel:



1. Un exemplu de subgraf al grafului G este graful neorientat:

G1=(V1 , M1) unde: V1={1,2,3 } (*s-a şters nodul 4*)

M1=([1,2],[2,3]} (*s-a eliminat muchia [1,4])*



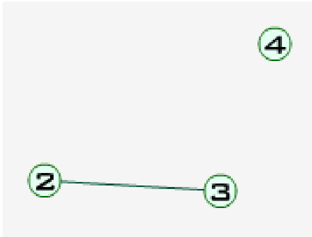
2. Un exemplu de subgraf al grafului G este graful neorientat:

G1=(V1 ,M1) unde:

V1={1,2,3,4} (*s-a eliminat nodul 1)*

M1={[2,3]}*(s-au eliminat muchiile [1,4], [1,2])*

reprezentat grafic astfel:



Observatie:

Fie G=(V, M) un graf neorientat. Un subgraf, al grafului G, se obtine ştergând anumite vârfuri şi odată cu acestea şi muchiile care le admit ca extremitate.

4. Gradul unui vârf

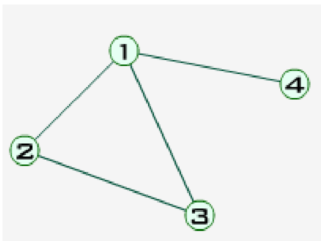
Definitie:

Fie G=(V, M) un graf neorientat şi x un nod al său. Se numeşte grad al nodului x, numărul muchiilor incidente cu x, notat d(x).

Exemplu:

Fie graful neorientat:

G=(V, M) unde: V= {1,2,3,4} si M={[l,2], [2,3], [1,4], [1,3]} reprezentat grafic astfel:



Gradul nodului 1 este d(1) şi d(1)=3 (*în graf sunt trei muchii incidente cu 1)*

Gradul nodului 2 este d(2) şi d(2)=2 (*în graf sunt două muchii incidente cu 2)*

Gradul nodului 3 este d(3) şi d(3)=2 (*în graf sunt două muchii incidente cu 3)*

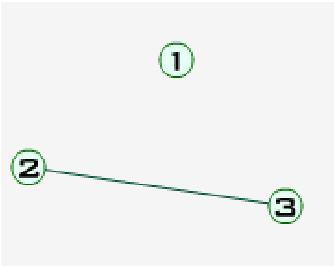
Gradul nodului 4 este d(4) şi d(4)=1 (*în graf este o singură muchie incidentă cu 4)*

Observatii:

1. Dacă gradul unui vârf este 0, vârful respectiv se numeşte **vârf izolat**.

2. Dacă gradul unui vârf este l, vârful respectiv se numeşte **vârf terminal**.

În graful care admite reprezentarea grafică:



deoarece d(1)=0, vârful 1 se numeşte vârf izolat, şi deoarece d(2)=d(3)=1, vârfurile 2 şi 3 se numesc vârfuri terminale.

Propozitie:

În graful neorientat G=(V, M), in care V={x1, x2, ..., xn} şi sunt **m** muchii, se verifică egalitatea :

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2m$$

Demonstratie: $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2m$

Muchia [x,y] contribuie cu o unitate la gradul lui x şi cu o unitate la gradul lui y, deci, cu două unităti la suma din enunt. Cum în total sunt m muchii, rezultă că suma gradelor este 2m.

Având in vedere faptul ca suma gradelor vârfurilor dintr-un graf este un număr par (2m), a apărut corolarul prezentat mai jos.

Corolar:

În orice graf neorientat, G=(V, M), există un număr par de vârfuri de grad impar.

5. Graf complet

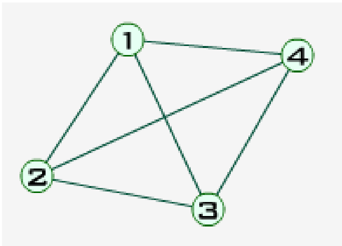
Definitie:

Fie G=(V, M) un graf neorientat. Graful G se numeşte **graf complet**, dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente.

Exemplu de graf neorientat complet:

G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4} si M={[1,2], [1,3], [l,4], [2,3], [2,4], [3,4]}

Reprezentarea sa grafică este:

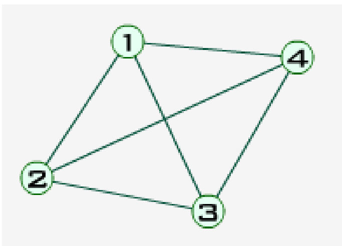


Observatii:

1. Într-un graf complet cu n vârfuri **gradul fiecărui vârf este n-1**, deoarece fiecare vârf este legat prin muchii de toate celelalte vârfuri.

2. Graful complet cu **n** vârfuri se notează cu $\mathbf{K_n}$.

În particular, graful:



se notează K_4 (este un graf complet cu 4 vârfuri).

Propozitie:

Într-un graf complet cu n vârfuri, notat K_n, există $\frac{n(n-1)}{2}$ muchii.

Demonstratie:

Din fiecare vârf **x**, pleacă **n-1** muchii, deci **d(x_i)=n-1**, pentru orice i= 1..n

Cum (folosind propozitia prezentată în sectiunea gradul unui vârf)

2m= d(x_1)+ d(x_2)+ ... +d(x_n) => 2m=(n-1)+ (n-1)+... +(n-1)

$$=> 2m=n(n-1) => m = \frac{n(n-1)}{2}$$

6. Graf bipartit

Definitie:

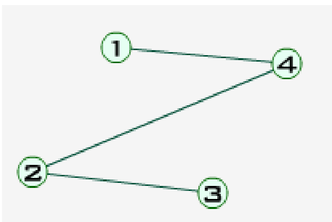
Fie G =(V, M) un graf neorientat. Graful G se numeşte **graf bipartit**, dacă există două multimi nevide Vl şi V2 cu proprietătile:

- $V1 \cup V2 = V$
- $V1 \cap V2 = \emptyset$
- orice muchie a lui G are o extremitate în V1 şi pe cealaltă în V2.

Exemplu de graf neorientat bipartit:

G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4} si M={[1,3], [2,3], [2,4]}

Reprezentarea sa grafică este:



7. Graf bipartit complet

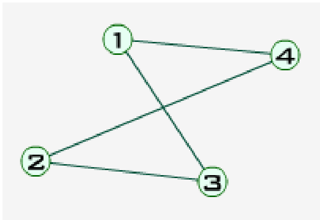
Definitie:

Fie G =(V, M) un graf bipartit. Graful G se numeşte **graf bipartit complet**, dacă pentru **orice x** din **V1** şi orice **y** din **V2** exista in G **muchia [x,y].**

Exemplu de graf neorientat bipartit:

G=(V, M) unde: V={ 1,2,3,4} si M={[1,3], [1,4], [2,3], [2,4]}

Reprezentarea sa grafică este:



Observatie 1:

A demonstra că un graf este **bipartit complet** înseamnă a demonstra :

- că este bipartit
- ca pentru orice x din Vl şi orice y din V2 există in G muchia [x,y].

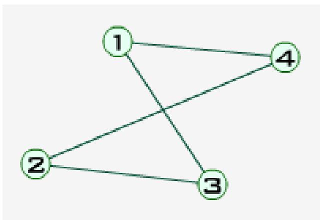
Observatie 2:

Într-un graf bipartit complet în care V1 are ***p*** elemente şi V2 are ***q*** elemente există ***pq*** muchii.

Observatie 3:

Graful bipartit complet în care V1 are ***p*** elemente şi V2 are ***q*** elemente se notează cu $\boldsymbol{K_{p,q}}$.

În particular, graful:



se notează $K_{2,2}$ si este un graf bipartit complet cu |V1| = 2 şi |V2|=2.